На правах рукописи

Кириченко Светлана Викторовна

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО, ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И СМЕШАННОГО ТИПА

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2013

Работа выполнена в Самарском государственном
университете путей сообщения
на кафедре высшей математики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО "СамГУ", Пулькина Людмила Степановна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. АН РБ, ГАНУ ИПИ АН РБ, Сабитов Камиль Басирович

доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО "КФУ", Уткина Елена Анатольевна

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН г. Новосибирск

Защита состоится 5 декабря 2013 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан ноября 2013 г. и размещен на официальном сайте Казанского федерального университета.

Ученый секретарь
совета Д 212.081.10

кандидат физ.-мат. наук, доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из направлений современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, бурно развивающимся в последнее время, является теория нелокальных задач. Внимание к таким задачам обусловлено не только теоретическим интересом, но и практической необходимостью. К нелокальным задачам нередко приводит математическое моделирование ряда физических процессов, представляющих интерес для современного естествознания. К ним относятся процессы, происходящие в турбулентной плазме, процессы теплопроводности, влагопереноса в капиллярно-пористых средах, волновые процессы в неоднородной среде.

Исследования показали, что присутствие нелокальных условий вызывает ряд специфических трудностей, которые не позволяют использовать для обоснования разрешимости нелокальных задач стандартные методы. Поэтому вопрос разработки методов исследования нелокальных задач является весьма актуальным.

Большой интерес среди нелокальных задач представляют задачи с интегральными условиями. Такие условия могут возникать в ситуациях, когда граница области протекания реального процесса недоступна для непосредственных измерений, но можно получить некоторую дополнительную информацию об изучаемом явлении во внутренних точках области. Часто такая информация поступает в виде некоторых средних значений искомого решения. При математическом моделировании такую информацию удобно представить в виде интеграла.

Среди первых работ, посвященных исследованию задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений с частными производными, отметим статьи Дж.Кэннона (J.R. Cannon)[1]

[1] *Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy//Quart. Appl. Math.-1963.-V.21.-e2.-P.155-160.*

и Л.И. Камынина[2], опубликованные в 1963 и 1964 годах соответственно. В этих работах изучен вопрос о разрешимости уравнения теплопроводности с нелокальными по пространственной переменной интегральными условиями.

В большинстве первых работ рассмотрены задачи для уравнений параболического и эллиптического типов. Нелокальные задачи для гиперболических уравнений стали объектом исследованием несколько позже, но в настоящее время активно изучаются. Систематическое исследование задач с нелокальными условиями для гиперболических уравнений началось в конце 20 века. Отметим здесь среди первых работ в этом направлении статьи Л.С. Пулькиной[3], A. Bouziani[4], Д.Г. Гордезиани и Г.А. Авалишвили[5].

В последнее время возник интерес к постановке и исследованию нелокальных задач для уравнений смешанного типа и вырождающихся уравнений. Отправной точкой исследования таких задач является статья Ф. Франкля[6]. Важный вклад в изучение нелокальных задач для уравнений смешанного типа внесли работы В.И. Жегалова, А.М Нахушева, Г.Д. Каратопраклиева, С.Н. Глазатова, Е.И. Моисеева, К.Б. Сабитова.

Отметим, что в большинстве работ, посвященных нелокальным задачам с интегральными условиями, изучены задачи с нелокальными по пространственным переменным условиями для уравнений второго порядка.

Представленная диссертация содержит результаты исследований задач с нелокальными по временной переменной условиями для гиперболических уравнений второго порядка, уравнений

[2]Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими условиями//Журнал вычислительной математики и математической физики.-1964.-Т.4.-№6.-С.1006-1024.

[3]Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения//Дифференциальные уравнения.-2000.-Т.36.-2.-С.279-280.

[4]Bouziani A. Strong solution to an hyperbolic evolution problem with nonlocal boundary conditions//Maghreb Math. Rev.-2000-V.9.-1-2.-p.71-84

[5]Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды//Матем. моделирование.-2000.-Т.12.-1.-С.94-103.

[6]Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике.-М.:Наука.1973.-324с.

смешанного типа, а также пространственно нелокальных задач для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка.

Целью настоящей работы является разработка методов исследования разрешимости краевых задач с нелокальными по времени интегральными условиями для уравнений гиперболического и смешанного типов, а также задач с нелокальными по пространственным переменным условиями для псевдогиперболического уравнения в цилиндрических областях.

Общая методика исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений, аппарат функциональных пространств С.Л. Соболева.

Научная новизна. В диссертации предложены методы исследования разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями, с помощью которых получены следующие новые результаты:

1. Доказана однозначная разрешимость задач с интегральными условиями по временной переменной первого и второго рода для гиперболических уравнений.

2. Доказано существование единственного обобщенного решения задач с интегральными условиями по временной переменной для вырождающегося уравнения и уравнения смешанного типа.

3. Доказана однозначная разрешимость задач с интегральным нелокальным условием по пространственным переменным для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка.

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории нелокальных задач, для применения в исследовании прикладных задач, математическими моделями которых являются задачи с нелокальными интегральными условиями.

Апробация работы. Основные результаты доложены на:

- научном семинаре “Неклассические задачи математической физики” под руководством доктора физико-математических наук, профессора Пулькиной Л.С. в Самарском государственном университете в 2010-2013 гг;

- Всероссийской научной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения” (кСамДиф-2009њ) (г. Самара, 2009);

- второй Всероссийской научно-практической конференции “Интегративный характер современного математического образования” (г. Самара, 2009);

- Всероссийской научной конференции с международным участием “Дифференциальные уравнения и их приложения” (г. Стерлитамак, 2011);

- восьмой Всероссийской научной конференция с международным участием “Математическое моделирование и краевые задачи”, посвящчнной 75-летию Ю. П. Самарина (г. Самара, 2011);

- международной научной конференции, посвящчнной 120-му юбилею Ст. Банаха (г. Львов, 2012);

- Воронежской зимней математической школе “Современные методы теории функций и смежные проблемы” (г. Воронеж, 2013);

- четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (г. Москва, 2013);

- международной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения” (г. Белгород, 2013);

- XI Казанской летней школе-конференции “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” (г. Казань, 2013).

Публикации. По теме дисертации опубликовано 12 работ, которые отражают ее основные результаты. Список публикаций приведен в конце автореферата. Три работы: [5], [10], [11] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на параграфы, списка литературы из 93 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 130 страниц машинописного текста.

1 Основное содержание работы

Во введении приведен обзор литературы, связанной с темой диссертации, обоснована актуальность, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена исследованию нелокальных по времени задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений в области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$.

Задача 1.1. Найти решение уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1.1}$$

в области Q_T, удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) + \int_0^T M_1(x,t)u(x,t)dt = 0, \tag{1.3}$$

$$u_t(x,0) + \int_0^T M_2(x,t)u(x,t)dt = 0. \tag{1.4}$$

В условиях (1.3), (1.4) $M_i(x,t)$ заданы в $\bar{Q}_T$, $g_i(x)$ – в $[0,l]$.

Заметим, что условия (1.3), (1.4) являются нелокальными, в силу чего мы не можем воспользоваться стандартными методами для доказательства разрешимости задачи 1.1. Поэтому мы сначала показали, что задача 1.1 эквивалентна задаче 1.2 с классическими начальными данными для нагруженного уравнения.

Задача 1.2. Найти в области Q_T решение уравнения

$$v_{tt} - v_{xx} + cv + \int\limits_0^T P(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau +$$

$$+2\int\limits_0^T (N(x,t,\tau))_x u_x(x,\tau)d\tau - \int\limits_0^T N_\tau(x,t,\tau)u_\tau(x,\tau)d\tau = F(x,t), \tag{1.5}$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad v(x,0) = 0, \; v_t(x,0) = 0, \tag{1.6}$$

если функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ связаны равенством

$$v(x,t) = Bu \equiv u(x,t) + \int\limits_0^T N(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau, \tag{1.7}$$

где обозначено

$$N(x,t,\tau) = M_1(x,\tau) + tM_2(x,\tau),$$

$$P(x,t,\tau) = N_{xx}(x,t,\tau) + N(x,t,\tau)[c(x,\tau) - c(x,t)] + N(x,t,0)M_2(x,\tau),$$

$$F(x,t) = f(x,t) + \int\limits_0^T N(x,t,\tau)f(x,\tau)d\tau.$$

Определены пространства и норма в них:

$$W(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^1(Q_T), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W(Q_T), \quad u(x,T) = 0\},$$

$$||u||_{W(Q_T)} = ||u||_{L_2(Q_T)} + ||u_t||_{L_2(Q_T)} + ||u_x||_{L_2(Q_T)}.$$

Вводится понятие обобщенного решения задачи 1.2:

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи 1.2 будем называть функцию $v(x,t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $v(x,0) = 0$ и для любой функции $\eta(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$ тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-v_t\eta_t + v_x\eta_x + cv\eta)dxdt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \eta(x,t) \int_0^T [Pu + 2N_x u_x - N_\tau u_\tau] d\tau dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^l F(x,t)\eta(x,t)dxdt, \tag{1.8}$$

в котором $u(x,t)$ и $v(x,t)$ связаны соотношением (1.7).

Введем следующие обозначения:

$$n_0 = \max\{||N||_{L_2(D)}, ||N_t||_{L_2(D)}, ||N_x||_{L_2(D)}, ||N_{xx}||_{L_2(D)}, ||N_\tau||_{L_2(D)}\},$$

$$p_0 = ||P||_{L_2(D)},$$

$$D = (0,T) \times (0,T),\ ||f||_{L_2(D)} = \max_{[0,l]} \Big(\int_0^T \int_0^T f^2(x,t,\tau)dtd\tau \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказано утверждение:

Теорема 1.1. Пусть

$$c(x,t) \in C(\bar{Q}_T), c_t(x,t) \in C(\bar{Q}_T),\ c(x,t) \geq c_0 > 0,$$

$$F(x,t) \in L_2(Q_T), n_0 < 1.$$

Тогда можно указать такие соотношения между T, l, n_0, p_0, c_0, $\max\limits_{\bar{Q}_T} |c_t(x,t)|$, при выполнении которых задача 1.2 однозначно разрешима.

Для доказательства теоремы строим последовательности приближенных решений задачи 1.2 $\{v^m, u^m\}$ из соотношений

$$\int_0^T\int_0^l(-v_t^m\eta_t+v_x^m\eta_x+cv^m\eta)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\eta(x,t)\int_0^T[P(x,t,\tau)u^m+2N_x(x,t,\tau)u_x^m-N_\tau(x,t,\tau)u_\tau^m]d\tau dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l F(x,t)\eta(x,t)dxdt,\quad v^m(x,0)=0, \tag{1.9}$$

$$u^m(x,t)+\int_0^T N(x,t,\tau)u^m(x,\tau)d\tau=v^{m-1}(x,t). \tag{1.10}$$

Показана сходимость этих последовательностей.Обоснована возможность предельного перехода при $m\to\infty$ в (1.9) и (1.10).

Далее доказывается теорема разрешимости задачи 1.1:

Теорема 1.2. Если выполняются условия теоремы 1.1, то п.в. в Q_T существует единственное решение задачи 1.1.

Решающим фактором в доказательстве теоремы 1.2 явилось обоснование принадлежности обобщенного решения задачи 1.2 пространству $W_2^2(Q_T)$, что позволило вывести следующее равенство $B(Lu-f)=0$, из которого следует, что $u(x,t)$ – решение уравнения (1.1). Выполнение условий (1.3), (1.4) следует из (1.10).

Во втором параграфе рассмотрена

Задача 1.3. В области Q_T найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и нелокальным начальным условиям

$$\int_0^T H_i(t)u(x,t)dt=0,\quad i=1,2. \tag{1.11}$$

Функции $H_i(t)$ заданы для всех $t \in [0,T]$.

Заметим, что (1.11) представляют собой нелокальные интегральные условия I рода. Как известно, такие условия вносят серьезные трудности в исследование разрешимости задач. Однако эти трудности можно преодолеть, если свести нелокальные условия I рода к нелокальным условиям II рода, следуя методу, предложенному Пулькиной Л.С. При исследовании задачи 1.3 это удалось сделать благодаря доказанному утверждению:

Лемма 1.1. Если $\Delta \equiv H_1(0)H_2'(0) - H_2(0)H_1'(0) \neq 0$, функции $H_i(t) \in C^2(\overline{Q}_T)$, то условия (1.11) эквивалентны нелокальным условиям второго рода

$$\begin{cases} (x,0) = a_1 u(x,T) + b_1 u_t(x,T) - \int\limits_0^T M_1(x,t)u(x,t)dt + g_1(x), \\ u_t(x,0) = a_2 u(x,T) + b_2 u_t(x,T) - \int\limits_0^T M_2(x,t)u(x,t)dt + g_2(x), \end{cases} \tag{1.12}$$

где $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1),

$$a_1 = \frac{H_2(0)H_1'(T) - H_1(0)H_2'(T)}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{H_2'(0)H_1'(T) - H_1'(0)H_2'(T)}{\Delta},$$

$$b_1 = \frac{H_1(0)H_2(T) - H_1(T)H_2(0)}{\Delta}, \qquad b_2 = \frac{H_1'(0)H_2(T) - H_2'(0)H_1(T)}{\Delta},$$

$$M_1(x,t) = \frac{H_2(0)(H_1(t)c(x,t) + H_1''(t)) - H_1(0)(H_2(t)c(x,t) + H_2''(t))}{\Delta},$$

$$M_2(x,t) = \frac{H_2'(0)(H_1(t)c(x,t) + H_1''(t)) - H_1'(0)(H_2(t)c(x,t) + H_2''(t))}{\Delta},$$

$$g_1(x) = \frac{H_2(0)\int\limits_0^T H_1(t)f(x,t)dt - H_1(0)\int\limits_0^T H_2(t)f(x,t)dt}{\Delta},$$

$$g_2(x) = \frac{H_2'(0)\int\limits_0^T H_1(t)f(x,t)dt - H_1'(0)\int\limits_0^T H_2(t)f(x,t)dt}{\Delta}.$$

Если $H_i(T) = H_i'(T) = H_i''(T) = 0$, $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, то мы приходим к следующей задаче: найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и нелокальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0) + \int\limits_0^T M_1(x,t)u(x,t)dt = g_1(x), \\ u_t(x,0) + \int\limits_0^T M_2(x,t)u(x,t)dt = g_2(x). \end{cases}$$

Таким образом, задача 1.3 с интегральными условиями I рода сведена эквивалентными операциями к задаче 1.1, разрешимость которой доказана в §1.1.

В первой главе также предлагается другой метод обоснования разрешимости на примере задачи 1.4, а именно, метод регуляризации. Этот метод позволил доказать существование решения, принадлежащего пространству $W_2^2(Q_T)$, т.е. обладающего большей гладкостью, но в частном случае: ядра интегральных условий зависят только от t.

Задача 1.4.: Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в области Q_T уравнению

$$u_{tt} - u_{xx} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1.13}$$

с нелокальными условиями

$$u(x,0) = \int_0^T H_1(t)u(x,t)\,dt, \tag{1.14}$$

$$u_t(x,0) = \int_0^T H_2(t)u(x,t)\,dt, \tag{1.15}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{1.16}$$

Здесь $b(x,t), c(x,t), f(x,t)$ — известные функции, заданные при $(x,t) \in \bar{Q}_T$, $H_1(t), H_2(t)$ - известные функции, заданные на $[0,T]$.

Теорема 1.3. Пусть $b(x,t), c(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $f(x,t) \in L_2(\bar{Q}_T)$, $f_t(x,t) \in L_2(\bar{Q}_T)$, $H_i(t) \in L_2[0,T]$, тогда существует единственное решение задачи 1.4, принадлежащее пространству $W_2^2(Q_T)$.

Для доказательства теоремы 1.3 мы применили метод регуляризации, а именно: переходим к вспомогательной **задаче 1.4** ε: найти решение уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + b(x,t)u_t + c(x,t)u - \varepsilon u_{xxt} = f(x,t) \tag{1.17}$$

в области Q_T, удовлетворяющее условиям (1.14), (1.15), (1.16), где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Разрешимость нелокальной задачи для уравнения (**??**) была доказана Р.Р. Сафиулловой. В предлагаемой работе получены оценки, позволившие перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и таким образом обосновать разрешимость поставленной задачи.

Во **второй главе** в области Q_T рассмотрены нелокальные задачи для уравнения

$$K(x,t)u_{tt} - (a(x)u_x)_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t). \tag{2.1}$$

Функции $K(x,t), a(x), b(x,t), c(x,t), f(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими, $a(x) > 0$, $K(x,0) = 0$.

Рассмотрены два случая: в первом $K(x,t)$ неотрицательна в Q_T, во втором $K(x,t)$ может менять знак в Q_T.

Задача 2.1. Найти в Q_T решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = 0, \tag{2.2}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \tag{2.3}$$

$$\int\limits_0^T u(x,t)dt = 0. \tag{2.4}$$

Здесь предполагаем, что $K(x,t) \geq 0$ в $\bar{Q}_T$. Отметим, что $K(x,t)$ может обращаться в нуль в любых внутренних точках.

Для исследования разрешимости задача 2.1 сведена к задаче с классическими начальными условиями для нагруженного уравнения относительно новой неизвестной функции

$$v(x,t) = \int\limits_0^t u(x,\tau)d\tau. \tag{2.6}$$

Тогда $v_t(x,t) = u(x,t)$. Из условий (2.2) $-$ (2.4) получаем условия на $v(x,t)$:

$$v(x,0) = 0, \tag{2.7}$$

$$v(x,T) = 0, \tag{2.8}$$

$$v_t(x,0) = 0, \tag{2.9}$$

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0. \tag{2.10}$$

Таким образом, приходим к

Задаче 2.2: Найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую в Q_T уравнению

$$\widetilde{K}(x,t)v_{tt} - (a(x)v_x)_x + \tilde{b}(x,t)v_t + \tilde{c}(x,t)v -$$

$$- \int\limits_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v(x,\tau)d\tau = F(x,t). \tag{2.11}$$

и условиям (2.8), (2.9), (2.10).

Здесь $F(x,t) = \int\limits_0^t f(x,\tau)d\tau$. $\tilde{b}(x,t), \tilde{c}(x,t)$ выражаются через заданные функции.

Вводится понятие обобщенного решения задачи 2.2:

Определение 2.1. Функцию $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ будем называть обобщенным решением задачи 2.2, если она удовлетворяет условию $v(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l[-\widetilde{K}v_t\eta_t+(\tilde{b}-\widetilde{K}_t)v_t\eta+av_x\eta_x+\tilde{c}(x,t)v\eta]dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_0^l\eta\int_0^t\tilde{c}_\tau(x,\tau)vd\tau dxdt=\int_0^T\int_0^l F(x,t)\eta dxdt. \qquad (2.12)$$

для всех функций $\eta(x,t)\in\hat{W}_2^1(Q_T)$.

Доказана

Теорема 2.1. Пусть $a(x), a(x), \tilde{b}(x,t), \tilde{b}_t(x,t), \tilde{b}_{tt}(x,t), \tilde{c}(x,t)$, $\tilde{c}_t(x,t)$ непрерывны в $\bar{Q}_T$, $\widetilde{K}(x,t)$, $\widetilde{K}_t(x,t)$, $\widetilde{K}_{tt}(x,t)$, $\widetilde{K}_{ttt}(x,t)$ непрерывны в Q_T, $f(x,t)\in L_2(Q_T)$. Если $\widetilde{K}_{tt}(x,0)-\tilde{b}_t(x,0)\geq 0$ для $(x,t)\in Q_T$, то существует единственное обобщенное решение задачи 2.2.

Так как соотношение (2.6) однозначно определяет функцию $u(x,t)$ через функцию $v(x,t)$ можно заключить, что, если выполнены условия теоремы 2.1, то существует единственное решение задачи 2.1ε.

Окончательно доказывается

Теорема 2.2. Если выполнены условия теоремы 2.1, то существует единственное обощенное решение задачи 2.1.

Во втором параграфе рассматривается задача для уравнения (2.1) в том случае, когда функция $K(x,t)$ может менять знак произвольным образом в $\overline{Q}_T$. Тогда (2.1) – уравнение смешанного типа.

Задача 2.3. Найти в конечной области Q_T решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям:

$$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, \qquad (2.13)$$

$$u_t(x,0)=0, \qquad (2.14)$$

$$u(x,0)+\int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt=0. \tag{2.15}$$

В условии (2.19) функция $H(t)$ задана в $[0,T]$ и выполнются условия: $H(T)=H(T)=0$. Коэффициент $K(x,t)$ таков, что $K(x,0)=K(x,T)=0$.

Показана эквивалентность задачи 2.3 задаче для нагруженного уравнения:

Задача 2.4. Найти в области Q_T решение уравнения

$$K(x,t)v_{tt}-(a(x)v_x)_x+b(x,t)v_t+c(x,t)v+$$

$$+\int\limits_0^T P(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau=F(x,t), \tag{2.16}$$

если функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$v_x(0,t)=v_x(l,t)=0,\ \ v(x,0)=0,\ v_t(x,0)=0, \tag{2.17}$$

а функции $u(x,t),v(x,t)$ связаны соотношением

$$u(x,t)+\int\limits_0^T H(t)u(x,t)dt=v(x,t). \tag{2.18}$$

Здесь функции $P(x,t,\tau),F(x,t)$ выражаются через заданные функции.

Доказана единственность решения задачи 2.4.

Теорема 2.3. Пусть

$$c(x,t)\in C(\bar{Q}_T),\ \ c_t(x,t)\in C(\bar{Q}_T),\ \ c(x,T)\geq 0,\ \ a(x)>0,\ \ h<1,$$

$$2b(x,t)-K_t(x,t)>1,\ \ p+c_t(x,t)(1-h\sqrt{T})^2<0.$$

Тогда существует не более одного решения задачи 2.4.

В силу эквивалентности задач 2.3 и 2.4 будет справедлива

Теорема 2.4. Если выполняются условия теоремы 2.3, то существует не более одного решения задачи 2.3.

В частном случае, когда коэффициенты уравнения (2.1) зависят только от пространственной переменной: $a(x), b(x), c(x)$, ядро интегральных условий (2.15) $H(t) \equiv 1$, $K_t(x,0) = 0$, доказано существование решения задачи 2.3.

Третья глава посвящена изучению задач для уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - \triangle u) - au_{xx} - bu_{yy} + c(x,y,t)u = f(x,y,t) \tag{3.1}$$

с нелокальным интегральным условием.

Здесь a, b положительные постоянные.

В первом параграфе задача для уравнения (3.1) изучается в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^2$ $-$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Задача 3.1. Найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \tag{3.2}$$

и нелокальному условию

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial \nu} + au_x cos(\nu,x) + bu_y cos(\nu,y) + \\ + \int\limits_\Omega K(\xi,\eta,x,y,t)u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta\Big)\Big|_{S_T} = 0. \tag{3.3}$$

Функция $K(\xi,\eta,x,y,t)$ задана в $\overline{\Omega \times Q_T}$, $\nu = (\nu_1,\nu_2)$ $-$ вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в текущей точке.

Обозначим

$$W(Q_T) = \{u(x,y,t) : u \in W_2^1(Q_T),\ u_{xt}, u_{yt} \in L_2(Q_T)\},$$

$$\| u \|_{W(Q_T)} = \Big(\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_{xt}^2 + u_{yt}^2)dxdydt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v(x,y,t) : v \in W(Q_T),\ v(x,y,T) = 0\}.$$

Вводим понятие обобщенного решения задачи 3.1.

Определение 3.1. Обобщенным решением задачи 3.1 будем называть функцию $u(x,y,t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,y,0) = \varphi(x,y)$ и тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + a u_x v_x + b u_y v_y - u_{xt} v_{xt} - u_{yt} v_{yt} + cuv) dxdydt+$$

$$+\int_0^T \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega K u d\xi d\eta ds dt - \int_\Omega \psi(x,y) v(x,y,0) dxdy-$$

$$-\int_\Omega (\psi_x(x,y) v_x(x,y,0)) + \psi_y(x,y) v_y(x,y,0))) dxdy = \int_0^T \int_\Omega f v dxdydt. \tag{3.4}$$

(3.4) для любой функции $v(x,y,t) \in \hat{W}(Q_T)$.

Основным результатом данного параграфа является приводимое ниже утверждение:

Теорема 3.1. Если $f(x,y,t) \in L_2(Q_T)$, $c(x,y,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $\varphi(x,y), \psi(x,y) \in W_2^1(\Omega)$, $K(\xi,\eta,x,y,t)$ непрерывна в области определения и интегрируема с квадратом по Q_T для почти всех $x, y \in \Omega$, то существует единственное обобщенное решение задачи 3.1.

Доказательство теоремы базируется на полученных в работе априорных оценках.

А во втором параграфе третьей главы для уравнения (3.1) исследуется задача в параллелепипеде $\Pi_T = (0,a) \times (0,b) \times (0,T)$. Т.к. граница этой области не является гладкой, то использовать известные неравенства, которые применялись в первом параграфе, не представляется возможным.

Задача 3.2: В области Π_T найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям (3.2) и нелокальным условиям

$$\begin{cases} {}_{xtt}(a,y,t)+au_x(a,y,t)+\int\limits_0^b\int\limits_0^a K(a,y,\xi,\eta,t)u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta=0, \\ u_{xtt}(0,y,t)+au_x(0,y,t)+\int\limits_0^b\int\limits_0^a K(0,y,\xi,\eta,t)u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta=0, \\ u_{ytt}(x,b,t)+bu_y(x,b,t)+\int\limits_0^b\int\limits_0^a K(x,b,\xi,\eta,t)u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta=0, \\ u_{ytt}(x,0,t)+bu_y(x,0,t)+\int\limits_0^b\int\limits_0^a K(x,0,\xi,\eta,t)u(\xi,\eta,t)d\xi d\eta=0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Для доказательства существования единственного обобщенного решения задачи 3.2 удалось получить оценки и таким образом доказать

Теорему 3.2. Пусть $c(x,y,t)\in C(\bar{\Pi}_T)$, $f(x,y,t)\in L_2(Q_T)$, $K(x,y,\varepsilon,\eta,t)\in C(\Omega\times\bar{\Pi}_T)$, $\varphi(x,y),\psi(x,y)\in W_2^1(\Omega)$, то существует единственное обобщенное решение задачи 3.2.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Людмиле Степановне Пулькиной за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] *Кириченко, С.В.* Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения/С.В.Кириченко//Тезисы докладов конференции "СамДифф-2009".Самара.2009.-С.62.

[2] *Кириченко, С.В.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения/С.В.Кириченко//Сборник научных трудов по материалам второй Всероссийской научно-практической конференции "Интегративный характер современного математического образования".Самара.2009.-С.62.

[3] *Кириченко, С.В.* Смешанная задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа/С.В.Кириченко//Сборник научных трудов по материалам Всероссийской научной конференции с международным участием "Дифференциальные уравнения и их приложения".Стерлитамак.2011.-С.144-146.

[4] *Кириченко, С.В.* Сведение нелокальной задачи для уравнения смешанного типа к задаче для нагруженного уравнения/С.В.Кириченко//Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи".Самара.2011.-С.93-95.

[5] *Кириченко, С.В.* Смешанная задача с интегральным условием для вырождающегося уравнения гиперболического типа/С.В.Кириченко//Вестник СамГУ.-2011.-№8(89).-С.29-36.

[6] *Кириченко, С.В.* Задача для параболического уравнения с нелокальным по времени условием/С.В.Кириченко//Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы".Воронеж.2013.-С.115-116.

[7] *Кириченко, С.В.* Краевая задача для гиперболического уравнения с нелокальным по времени услови-

ем/С.В.Кириченко//Тезисы докладов Четвертой Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева.Москва.2013.-С.203-204.

[8] *Кириченко, С.В.* Задача с нелокальными по времени интегральными условиями для гиперболического уравнения/С.В.Кириченко//Сборник материалов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения".Белгород.2013.-С.91.

[9] *Кириченко, С.В.* Нелокальная задача для псевдогиперболического уравнения/С.В.Кириченко//Сборник материалов XI международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы".Казань.2013.-С.240.

[10] *Кириченко, С.В.* Об одной нелокальной задаче с нелокальными начальными данными для уравнения смешанного типа в прямоугольнике/С.В.Кириченко//Вестник СамГТУ.Сер. физ.-мат. наук.-2013.-№1(30).-С.72-76.

[11] *Кириченко, С.В.* Задача с нелокальными по времени интегральными условиями для гиперболического уравнения/С.В.Кириченко//Вестник СамГУ.-2013.-№6(107).-С.30-36.

[12] *Kirichenko, S.* Boundary value problem with non-local conditions in time for hyperbolic equation/S.Kirichenko//"International conference dedicated to the 120th anniversary jf Stefan Banach".Lviv.2012.-P.207-208.